

УДК 532.517.7

ПРОСТАЯ АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ДЛЯ РАСЧЕТА ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ ГРАДИЕНТОМ ДАВЛЕНИЯ

© 1999 г. А. В. Гарбарук, Ю. В. Лапин, М. Х. Стрелец

Санкт-Петербургский государственный технический университет

Поступила в редакцию 28.10.97 г.

В рамках традиционной двуслойной клаузеровской схемы турбулентного пограничного слоя предложена простая алгебраическая модель для расчета течений с положительными градиентами давления, сравнимая по точности с лучшими из известных алгебраических и дифференциальных моделей турбулентности. Турбулентная вязкость во внутренней области пограничного слоя описывается соотношением, в котором роль линейного масштаба играет расстояние до стенки, а масштаб скоростей определяется величинами динамической скорости и параметра равновесности Клаузера. Для описания взаимодействия молекулярного и турбулентного процессов переноса в переходной области используется кубический демпфирующий множитель. Во внешней области используется соотношение, в котором роль линейного масштаба играет толщина вытеснения, а роль масштаба скоростей – величина, зависящая от динамической скорости, параметра равновесности Клаузера и параметров осредненного течения в точке, где достигается максимум касательного напряжения. Приводятся результаты тестирования предложенной модели на примере расчета ряда пограничных слоев с умеренными и сильными градиентами давления, включая предотрывные режимы течения.

Введение. Проблема описания турбулентных пограничных слоев при положительном градиенте давления, в том числе предсказание положения точки отрыва, в связи с большой практической значимостью остается одной из наиболее актуальных проблем теории пристенной турбулентности.

Первая Стэнфордская конференция 1968 г. [1] подвела некоторые итоги более чем сорокалетнему, если вести отсчет от положившей начало полуэмпирической теории турбулентности классической работы Прандтля 1925 г. [2], периода развития алгебраических моделей. Конференция отметила, в частности, неэффективность существовавших в то время алгебраических моделей для предсказания отрыва турбулентного пограничного слоя.

В 70-е годы основные надежды на успех в решении рассматриваемой задачи были связаны с разработкой дифференциальных моделей турбулентности, основанных на уравнениях для вторых моментов (кинетической энергии турбулентности, скорости ее диссипации, масштаба турбулентности и др.). Однако детальный анализ возможностей моделей такого типа, проведенный на второй Стэнфордской конференции 1980 г., привел к выводу о том, что и эти модели не обеспечивают достаточно надежного предсказания характеристик пристенных турбулентных течений с положительным градиентом давления.

Лишь в начале 90-х годов было предложено несколько моделей турбулентности, которые позволяют рассчитывать течения с сильным неблагоприятным градиентом давления с достаточной для практики точностью. К ним, в частности, относятся так называемая полудифференциальная модель Хортона [3], дифференциальные модели с одним уравнением для турбулентной вязкости, предложенные Спалартом и Аллмарасом [4] и А.Н. Гуляевым, В.Е. Козловым и А.Н. Секундовым [5] и дифференциальная $k-\omega$ -модель Ментера [6]. Это подтверждается результатами проведенного недавно тестирования этих и некоторых других моделей применительно к течениям в турбулентных пограничных слоях с продольным перепадом давления [7]. Тем не менее задача построения простой алгебраической модели, не уступающей по точности перечисленным более сложным моделям, применительно к данному классу течений по-прежнему остается актуальной.

В данной работе предлагается алгебраическая модель и приводятся результаты ее тестирования.

Описание модели. В основу этой модели положена однопараметрическая двуслойная модель турбулентности для течения на плоской пластине [8]. В этой работе на основе анализа четырех алгебраических моделей, базирующихся на использовании различных соотношений для турбулентной вязкости во внешней области, было показано, что универсальными главными масштабами внешней области на плоской пластине являются

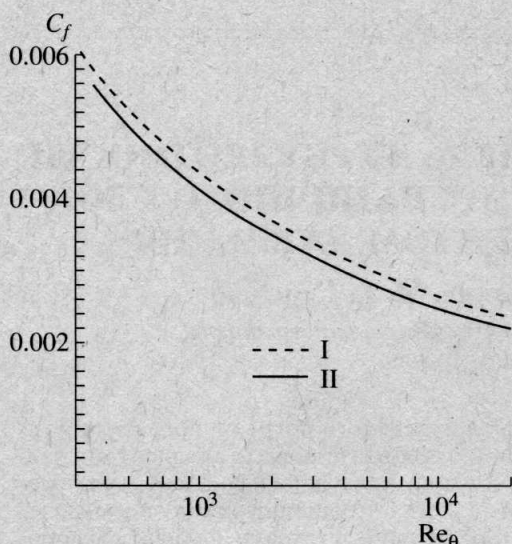


Рис. 1. Сравнение расчетной и экспериментальной зависимостей коэффициента трения на плоской пластине от числа Рейнольдса, рассчитанного по толщине потери импульса: I – формула Брэдшоу (6), II – расчет по модели (5).

динамическая скорость $v_* = (\tau_w/\rho)^{1/2}$ и толщина вытеснения пограничного слоя δ^* . При этом из четырех рассмотренных соотношений для турбулентной вязкости во внешней области, основанных на использовании различных линейных и скоростных масштабов, лишь соотношение $v_{T0} = k v_* \delta^* \gamma$ ($k = 0.41$, γ – параметр перемежаемости Клебана), названное в [8] формулой Клаузера-3, обладает свойством универсальности (независимости от числа Рейнольдса, построенного по толщине потери импульса $Re_\theta = U_e \theta / \nu$) во всем рассмотренном диапазоне чисел Рейнольдса ($320 \leq Re_\theta \leq 10^4$).

Большую часть внутренней области пограничного слоя на плоской пластине составляет так называемая область действия закона стенки или область логарифмического профиля скоростей

$$u/v_* = 1/k \ln(y v_* / \nu) + B, \quad k = 0.41, \quad B = 5.1. \quad (1)$$

С учетом (1) и постоянства касательного напряжения в этой области можно сформулировать “линейную” модель турбулентности во внутренней области вида

$$v_{Tl} = k y v_* D, \quad (2)$$

в которой демпфирующий множитель D должен обеспечивать правильное поведение турбулентной вязкости вблизи стенки [9]

$$v_{Tl}|_{y \rightarrow 0} = \alpha y^4 \quad (\alpha = 0.092 - 0.125),$$

обращаться в единицу при $y v_* / \nu \geq 40$ и удовлетворять следующему соотношению:

$$B = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \left[\int_0^\eta \frac{d\eta}{1 + k\eta D} - \frac{1}{k} \ln \eta \right]. \quad (3)$$

Всем этим требованиям соответствует демпфирующая функция вида

$$D = [1 - \exp(-y v_* / \nu A)]^3, \quad A = 12. \quad (4)$$

Однако в недавно опубликованной работе [10] в результате детальных экспериментальных исследований установившегося течения в круглой трубе при больших числах Рейнольдса (до $Re = 3.5 \times 10^7$) было показано, что общепринятое до последнего времени значение постоянной Кармана $k = 0.41$ на самом деле должно быть заменено на $k = 0.436$, а значение константы $B = 5.1$ в логарифмическом законе (1) – на величину 6.13.

С учетом этих значений эмпирических постоянных формула (3) дает в демпфирующем множителе (4) значение константы $A = 13$, в результате чего модель турбулентности для плоской пластины может быть представлена в окончательном виде

$$\begin{aligned} v_T &= k v_* \min\{yD, \delta^* \gamma\}, \\ D &= [1 - \exp(-y v_* / \nu A)]^3, \\ \gamma &= [1 + 5.5(y/\delta)^6]^{-1}, \\ A &= 13, \quad k = 0.436, \end{aligned} \quad (5)$$

где δ – толщина пограничного слоя, определяемая по уровню $u/U_e = 0.995$ (U_e – скорость на внешней границе пограничного слоя).

Результаты расчетов коэффициента трения C_f в зависимости от числа Рейнольдса Re_θ и их сравнение с опытными данными, представленными эмпирической формулой Брэдшоу

$$C_f = \frac{0.01013}{\lg(Re_\theta) - 1.02} - 0.00075, \quad (6)$$

приведены на рис. 1, из которого видно, что модель (5) достаточно точно описывает эмпирическую зависимость в широком диапазоне чисел Рейнольдса. Это дает некоторые основания для попытки обобщения модели (5) на случай течения с неблагоприятным градиентом давления.

Обобщение модели для течений с положительным градиентом давления. Как известно, характерным отличием течения в пограничном слое при положительном градиенте давления ($dp/dx > 0$) от течения на плоской пластине ($dp/dx = 0$) является то, что в первом случае напряжение трения достигает максимума внутри пограничного слоя ($\tau_{\max} = \tau|_{y=y_m}$), в то время как на плоской пластине наибольшее значение напряжения трения имеет

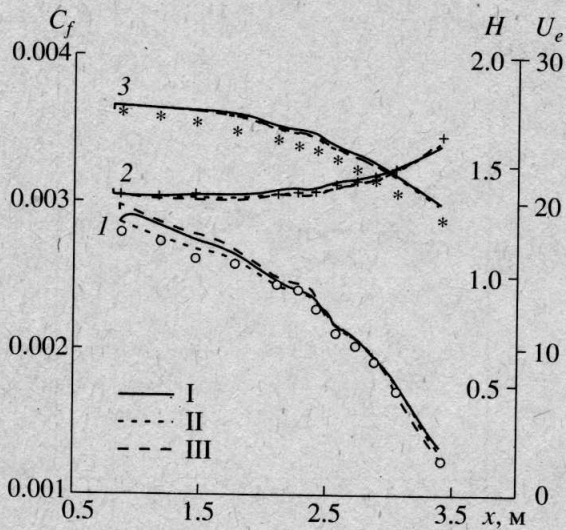


Рис. 2. Расчетные и экспериментальные распределения интегральных параметров пограничного слоя для опыта [11]: 1 – продольное распределение коэффициента трения C_f , 2 – формпараметра H , 3 – скорости на внешней границе пограничного слоя U_e . I – расчет по модели (10), II – по модели Хортонга [3], III – по модели Менгера [6]. Кривые – расчет, точки – экспериментальные данные.

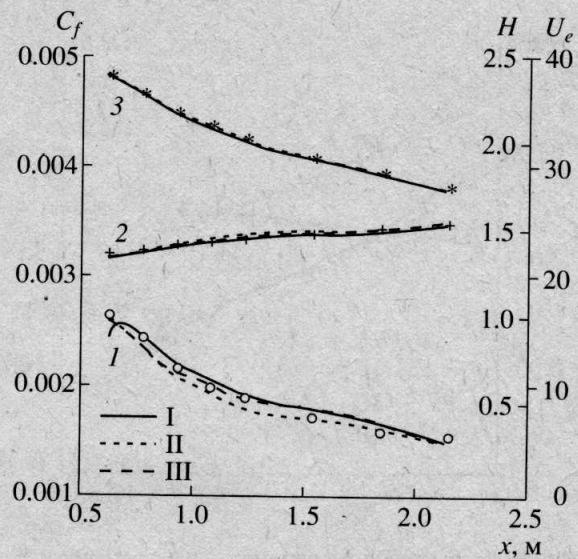


Рис. 3. Расчетные и экспериментальные распределения интегральных параметров пограничного слоя для опыта 3300 [1]. Обозначения те же, что и на рис. 2.

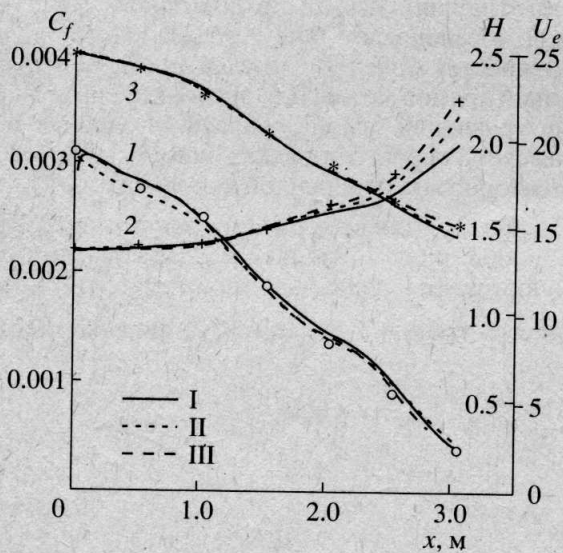


Рис. 4. Расчетные и экспериментальные распределения интегральных параметров пограничного слоя для опыта 4500 [1]. Обозначения те же, что и на рис. 2.

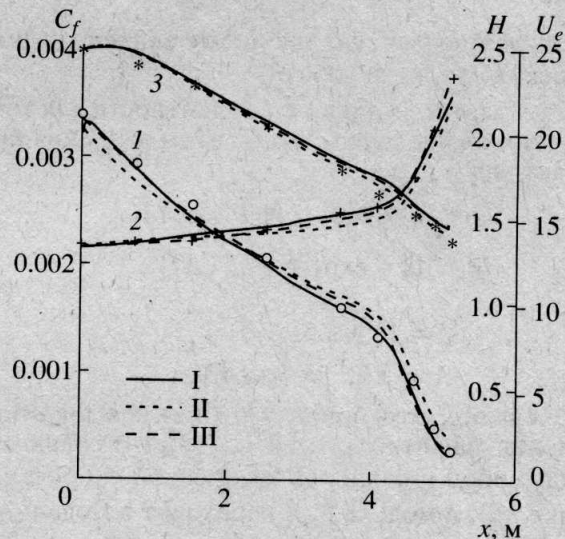


Рис. 5. Расчетные и экспериментальные распределения интегральных параметров пограничного слоя для опыта 4800 [1]. Обозначения те же, что и на рис. 2.

место на стенке $\tau_{\max} = \tau|_{y=0}$. В зависимости от условий течения значение координаты y_m лежит в интервале $0 \leq y_m \leq 0.5\delta$. Что касается величины τ_{\max} , то она определяется балансом действия сил инерции и давления и с учетом логарифмического закона скоростей (1) может быть приближенно рассчитана по формуле

$$\tau_{\max} \approx \tau_w \left(1 + \frac{2y_m}{k\delta^*} \frac{U_e}{U|_{y=y_m}} \beta \right), \quad \beta = \frac{\delta^*}{\tau_w} \left| \frac{dp}{dx} \right|. \quad (7)$$

*Соотношение (7) позволяет обобщить рассмотренную выше модель турбулентности для течения на плоской пластинке на случай течения с положительным градиентом давления. Для этого достаточно в качестве масштаба скорости во внешней области использовать величину

$$v_{SO} = v_* \left(1 + \frac{2y_m}{k\delta^*} \frac{U_e}{U|_{y=y_m}} \beta \right)^{1/2}, \quad (8)$$

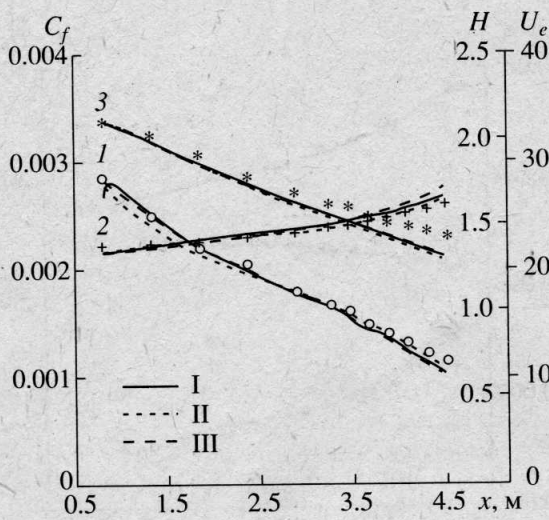


Рис. 6. Расчетные и экспериментальные распределения интегральных параметров пограничного слоя для опыта 1100 [1]. Обозначения те же, что и на рис. 2.

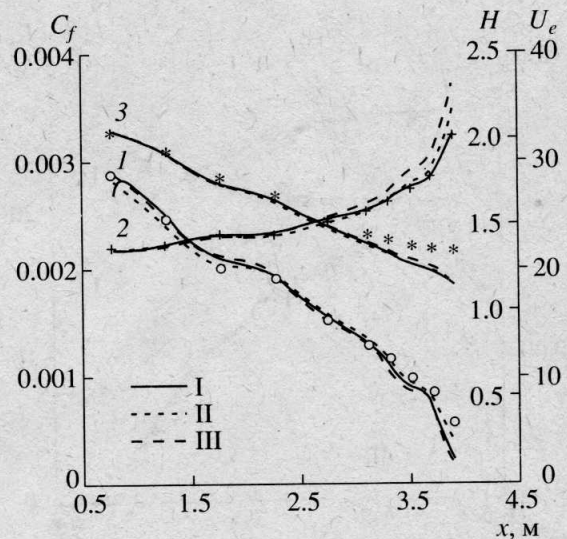


Рис. 7. Расчетные и экспериментальные распределения интегральных параметров пограничного слоя для опыта 1200 [1]. Обозначения те же, что и на рис. 2.

а во внутренней области

$$v_{SI}(y) = v_* \left(1 + \frac{y}{\delta_* \beta}\right)^{1/2}, \quad (9)$$

приблизленно равную текущему значению динамической скорости $[\tau(y)/\rho]^{1/2}$.

В результате модель турбулентности для течений с положительным градиентом давления принимает вид

$$\begin{aligned} v_T &= k \min\{y v_{SI} D, \delta_* v_{SO} \gamma\}, \\ D &= [1 - \exp(-y v_{SI}/vA)]^3, \\ \gamma &= [1 + 5.5(y/\delta)]^6, \\ A &= 13, \quad k = 0.436. \end{aligned} \quad (10)$$

Очевидно, что при $\beta = 0$ (плоская пластина) значения масштабов v_{SI} и v_{SO} (8), (9) совпадают между собой и равны динамической скорости на стенке v_* , а модель (10) переходит в модель для плоской пластины (5).

Рассмотрим далее результаты тестирования модели (10) на примере расчета нескольких течений в турбулентном пограничном слое с положительным градиентом давления.

Результаты тестирования модели. Для тестирования описанной модели турбулентности были выбраны пять опытов для несжимаемого турбулентного пограничного слоя с положительным градиентом давления, результаты которых представлены в трудах Стэнфордской конференции 1968 г. [1] (опыты 1100, 1200, 3300, 4500, 4800), а также результаты более поздних экспериментов [11].

Для решения уравнений пограничного слоя использовался так называемый обратный метод [12]

(в качестве исходных данных из эксперимента задается не распределение скорости вдоль внешней границы пограничного слоя, а распределение толщины вытеснения). Как было показано в [7], такой подход обеспечивает более объективную оценку возможностей моделей турбулентности, чем традиционный прямой метод. Для численного интегрирования уравнений использовалась двуслойная маршевая схема первого порядка точности по продольной и второго по поперечной координате.

На рис. 2–7 для всех рассмотренных пограничных слоев представлены результаты расчетов следующих интегральных характеристик: коэффициента трения $C_f = 2\tau_w/\rho U_e^2$, формпараметра

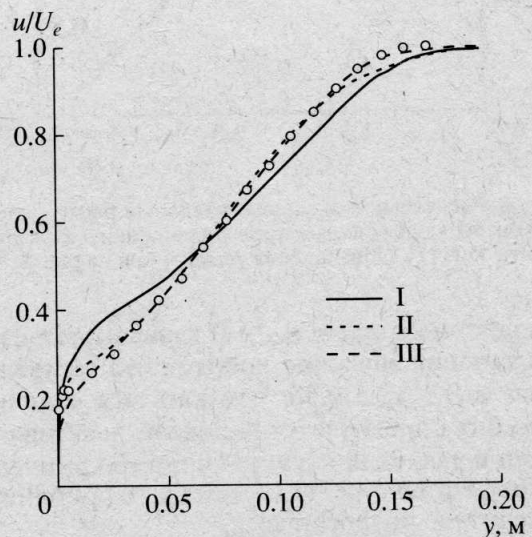


Рис. 8. Расчетные и экспериментальные профили скорости для опыта 4500 при $x = 3.048$ м. Обозначения те же, что и на рис. 2.

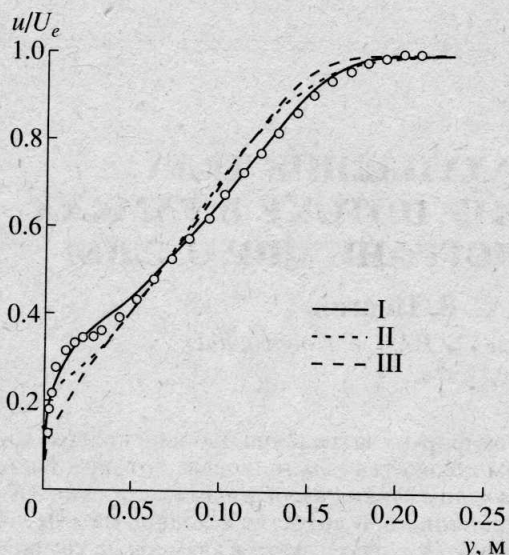


Рис. 9. Расчетные и экспериментальные профили скорости для опыта 1200 при $x = 3.932$ м. Обозначения те же, что и на рис. 2.

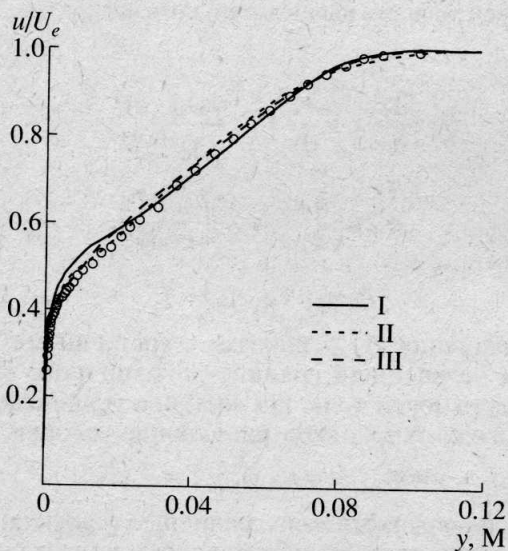


Рис. 10. Расчетные и экспериментальные профили скорости для опыта [11] при $x = 3.4$ м. Обозначения те же, что и на рис. 2.

$H = \delta^*/\theta$, скорости на внешней границе U_e (при использовании обратного метода эта величина определяется в процессе решения задачи). Наряду с моделью (10), на этих рисунках для сравнения приведены результаты расчетов с использованием полудифференциальной модели Хортон [3] и $k-\omega$ модели Ментера [6], которые, как показано в [7], обеспечивают наиболее надежное описание турбулентных пограничных слоев с положительным градиентом давления.

Из представленных результатов видно, что во всех рассмотренных случаях предлагаемая мо-

дель практически не уступает по точности моделям Хортон и Ментера. Лишь в опыте 4500 (рис. 4) модель (10) несколько занижает величину формпараметра H по сравнению с моделями Хортон и Ментера и с экспериментальными данными. Как видно из рис. 8, это связано с соответствующей деформацией формы профиля скорости при использовании модели (10). Однако во всех других рассмотренных случаях данная модель описывает профиль скорости не хуже чем две другие модели (см. рис. 9, 10).

Таким образом, можно заключить, что для рассматриваемого класса течений (пограничный слой с положительным градиентом давления) предлагаемая алгебраическая модель в целом не уступает современным значительно более сложным полудифференциальным и дифференциальным моделям турбулентности.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 97-02-16492).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Coles D.E., Hirst E.A. Computation of Turbulent Boundary Layers – 1968. AFOSR-IFP Stanford Conf. V. 2. Stanford Univ., Palo Alto, CA, 1969.
2. Prandtl L. Über die Ausbildung der Turbulenz // ZAMM. 1925. № 5.
3. Horton H.P. Invariant Imbedding Algorithms for Inverse Boundary Layer Problems. Queen Mary & Westfield College, Univ. London, UK, Faculty of Engng Paper. 1994. QMW-EP1102.
4. Spalart P.R., Allmaras S.R. A one-Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows // La Recherche Aerospaciale. 1994. № 1. P. 5.
5. Гуляев А.Н., Козлов В.Е., Секундов А.Н. К созданию универсальной однопараметрической модели для турбулентной вязкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1993. № 4. С. 69.
6. Menter F.R. Zonal Two Equation $k-\omega$ Turbulence Models for Aerodynamic Flows // AIAA Paper. 1993.
7. Гарбарук А.В., Лапин Ю.В., Стрелец М.Х. Применение обратного метода решения уравнений пограничного слоя для тестирования моделей турбулентности // ТВТ. 1998. Т. 36. № 4. С. 607.
8. Лапин Ю.В., Поспелов В.А. Турбулентный пограничный слой на плоской пластине // ТВТ. 1995. № 3. С. 422.
9. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987.
10. Zagarola M.V., Smits A.J. Scaling of the Mean Velocity Profile for Turbulent Pipe Flow // Phys. Rev. Letters. 1997.
11. Samuel A.E., Joubert P.N. A Boundary Layer Developing in an Increasingly Adverse Pressure Gradient // Journ. Fluid Mech. 1974. V. 66. P. 481.
12. Catherall D., Mangler K.W. The Integration of the Two Dimensional Laminar Boundary-Layer Equations Past the Point of Vanishing Skin Friction // Journ. Fluid Mech. 1966. V. 26. P. 163.